SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} 3x + 2y + \sqrt{2}\,z = 0 \\ x + 7y = 5 \end{cases}$$

è un sistema lineare.

In generale

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n variabili $x_1, x_2, , x_n$

m equazioni

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad b_i \in \mathbb{R}$

Una soluzione del sistema è una "lista"

VETTORE $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_n \end{pmatrix}$ tc se ponete $x_1 = a_1, x_2 = a_2 = x_n = a_n$ tutte le equazioni sono verificate.

Esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

quali sono le soluzioni?

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ -2a_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

c'è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c'è $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

RISPARMIARE LO SPAZIO CON UNA NOTAZIONE OPPORTUNA

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATRICE

$m \times n$

righe colonne

"la matrice incompleta associata al sistema"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

MATRICE $m \times (n+1)$

"la matrice completa associata al sistema"

SOMMA FRA MATRICI

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & \sqrt{2} \\ -7 & -4 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 6 & \sqrt{2} \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO FRA MATRICI

$$\begin{array}{cccc} & m \text{ colonne} & k \text{ colonne} & k \text{ colonne} \\ n \text{ righe} & \begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \quad B \quad \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \quad C \quad \end{pmatrix} \\ & & m \text{ righe} & n \text{ righe} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

è una 2×3

è una 3×4

$(1,1)$ $\quad$ $(1,2)$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 21 & & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$(2,4)$

è una 2×4

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) = -5$$

$$2 \cdot 1 + 1(-1) + 4 \cdot 5 = 21$$

Prop. 1.2.1 del libro.

1. Siano A, B, C tre matrici

$A \quad n \times m$

$B \quad m \times k$

$C \quad k \times t$

Allora $(AB)C = A(BC)$

proprietà associativa del prodotto fra matrici

(2) Siano A, B C tre matrici

A $n \times m$

B e C ~~m~~ $m \times K$

allora

$$A(B+C) = AB + AC$$

proprietà distributiva della somma e del prodotto fra matrici.

Dati A_1, B_1 e C_1 matrici

con A_1 e B_1 $n \times m$

C_1 $m \times K$

Vale

$$(A_1 + B_1) C_1 = A_1 C_1 + B_1 C_1$$

Matrici e sistemi lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad\quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad\quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni, n variabili

Usando il prodotto fra matrici questo equivale a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{pmatrix}}_{m \times 1}$$

MATRICI A SCALINI (per RIGHE)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

è una matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quando un sistema lineare è tale che la sua matrice completa è a scalini, è ormai facile da risolvere.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

l'ultima riga dice $5x_4 = 3$

$$x_4 = \frac{3}{5}$$

la penultima riga dice.

$$3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 = \frac{2-2x_3}{3}$$

la prima riga dice.

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 1$$

sostituisco

$$x_1 + 2\,\frac{2-2x_3}{3} + \frac{3}{5} = 1$$

$$x_1 = 1 - \frac{3}{5} - \frac{4-4x_3}{3} = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}x_3$$

$$= \frac{6-20}{15} + \frac{4}{3}x_3 = -\frac{14}{15} + \frac{4}{3}x_3$$

Le soluzioni

$$\begin{pmatrix} -\frac{14}{15} + \frac{4}{3}x_3 \\ \frac{2-2x_3}{3} \\ x_3 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{libero!} \\ \\ \end{matrix}$$

al variare di $x_3 \in \mathbb{R}$

Altro esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

la matrice completa è a scalini

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

PIVOT

IL SISTEMA NON HA SOLUZIONI

Se nella matrice completa di un sistema (a scalini) c'è un PIVOT nell'ultima colonna, il sistema non è risolubile.

<u>Def</u> Data una matrice a scalini diremo che il suo RANGO è il numero dei suoi PIVOT.

Vale dunque che, dati un sistema con matrice incompleta A e matrice completa A' (A SCALINI), il sistema ha soluzione se e solo se rango di A = rango di A'

$$\begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - & - \\ & 1 & - & - & - & - \\ & & & 1 & - & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ALGORITMO DI GAUSS (Paragrafo 1.4)

Idea: dato un sistema qualunque, con matrice completa A', posso trasformare la matrice in una matrice a scalini $\tilde{A}'$ che descrive un sistema equivalente (ossia con LE STESSE SOLUZIONI)

☺

TRE MOSSE

a) scambio fra loro due righe.

b) moltiplico una riga per un numero $\lambda \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

c) sostituisco la riga i-esima con

riga i-esima + μ riga j-esima

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

sostituisco la riga 2 con

riga 2 + $(-2) \cdot$ riga 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \leftarrow \text{CONTINUARE!}$$

Si dimostra per induzione che con le mosse descritte sopra è possibile trasformare qualunque matrice in una matrice a scalini.